Université A. Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques et Informatique

Année : 2008/2009
Analyse 2 : SMA

Contrôle continu N^0 2

(Durée : 1h 30 mn)

Les réponses doivent être concises et précises.

Exercice 1. (5 points) Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^n}.$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f que l'on déterminera.
(*Indication*. Distinguer les cas : $t \in [0,1[$, $t = 1$ et $t > 1$).

2) En déduire que $(f_n)_{n\geq 2}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ et sur $\mathbb{R}_+$ vers f.

3) **(i)** Soit $n \geq 2$. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.

(ii) Montrer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, que

$$0 \leq e^{-t} - f_n(t) \leq t^n.$$

(iii) En utilisant **1)** et **3)(ii)**, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 1 - \frac{1}{e} = \int_0^1 f(t)dt.$$

Conclure.

Exercice 2. (10 points) Soit Γ la courbe plane paramétrée par la fonction f définie par

$$f(t) = (x(t), y(t)) = (\frac{t^2+1}{2t}, \frac{2t-1}{t^2}) = (\frac{t}{2} + \frac{1}{2t}, \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}).$$

(i) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

(ii) Etudier les variations de x et de y.

(iii) Montrer que la courbe Γ admet un point stationnaire. Préciser l'équation de la tangente en ce point et sa nature.

(iv) Montrer que la courbe Γ possède une asymptote horizontale Δ (au voisinage de l'infini) et préciser sa position par rapport à Γ.

(v) En calculant $x^2(t)$, montrer l'existence de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} [y(t) - (a\,x^2(t) + b\,x(t) + c)] = 0.$$

En déduire l'existence d'une parabole P asymptote à la courbe Γ au voisinage de 0. Préciser la position de Γ par rapport à P.



Exercice 3. (5 points) On considère l'équation différentielle

$$(x^2 + 1)y' + xy + y^3 = 0 \qquad (1).$$

(i) Quel est le type de l'équation (1) ? Préciser le ou les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels (1) admet des solutions.

(ii) Résoudre l'équation (1).
Indication. A l'aide d'une intégration par parties ou bien d'un changement de variable, déterminer les primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2}{(1 + x^2)^2}.$$

